Universität Zürich[UZH]

Philosophisches Seminar

# Einführung in die formale Logik I

Frühjahrssemester 2019

Vorlesung 7

Prof. Dr. Katia Saporiti

**Zwei Ankündigungen des Fachvereins:**
**Symposion: Mi 17.4. um 18.15 in KOL N 1**
**Vollversammlung: Mo 29.4. um 18.15 in KOL G 212**

## Inhalt: Aussagenlogik / Junktorenlogik (*propositional logic*)

- **Die aussagenlogische Struktur normalsprachlicher Sätze**
  - Formalisierungsbeispiele
  - „wenn, dann" & „nur dann, wenn"
  - „es sei denn, dass"
  - „notwendig" & „hinreichend"
  - Notwendige und hinreichende Bedingungen
- **Bekannte Schlussformen und ihnen verwandten Fehlschlüsse**
  - *Modus (ponendo) ponens* & *fallacia consequentis (Affirmation des Nachsatzes)*
  - *Modus (tollendo) tollens* & *fallacia antecedentis (Negation des Vordersatzes)*
  - *Modus ponendo tollens* & *Negation eines Konjunktionsglieds*
  - *Modus tollendo ponens* & *Affirmation eines Adjunktionsglieds*
  - *Zulässiger* und *unzulässiger Umkehrschluss*
  - *Kontraposition* und *falsche Kontraposition*
- **Überprüfung von Schlüssen mit Hilfe von Wahrheitstafeln**

## Formalisierungsbeispiele I

| | Beispielsatz | AL-Formel | Interpretation der Satzkonstanten |
|---|---|---|---|
| (1) | Peter ist nicht gestürzt. | $\neg p$ | p: Peter ist gestürzt. |
| (2) | Es ist nicht der Fall, dass Peter gestossen wurde. | $\neg p$ | p: Peter wurde gestossen. |
| (3) | Es ist ja nicht so, als hätte Peter keine Freunde. | $\neg\neg p$ | p: Peter hat Freunde. |
| (4) | Es entspricht nicht den Tatsachen, dass Peter von seinem Hund umgerissen wurde. | $\neg p$ | p: Peter wurde von seinem Hund umgerissen. |
| (5) | Es trifft nicht zu, dass Peter fröhlich war. | $\neg p$ | p: Peter war fröhlich. |
| (6) | Peter hat noch nie gelogen. | $\neg p$ | p: Peter hat schon mal gelogen. |



| | | | |
|---|---|---|---|
| (7) | Hänsel hat blaue Augen und blonde Haare. | $p \wedge q$ | p: Hänsel hat blaue Augen.<br>q: Hänsel hat blonde Haare. |
| (8) | Gretel hat sowohl Hänsel als auch die Hexe überlistet. | $p \wedge q$ | p: Gretel hat Hänsel überlistet.<br>q: Gretel hat die Hexe überlistet. |
| (9) | Max lügt, aber Moritz sagt die Wahrheit. | $p \wedge q$ | p: Max lügt.<br>q: Moritz sagt die Wahrheit. |
| (10) | Max und Moritz lügen nicht beide. | $\neg p \vee \neg q$ | p: Max lügt. q: Moritz lügt. |
| (11) | Max und Moritz lügen beide nicht. | $\neg p \wedge \neg q$ | p: Max lügt. q: Moritz lügt. |
| (12) | Die Prinzessin weint, obwohl der Frosch nicht lügt. | $p \wedge \neg q$ | p: Die Prinzessin weint.<br>q: Der Frosch lügt. |
| (13) | Der Jäger ist nicht zurückgekehrt oder der Dieb wurde gefasst. | $\neg p \vee q$ | p: Der Jäger ist zurückgehrt.<br>q: Der Dieb wurde gefasst. |

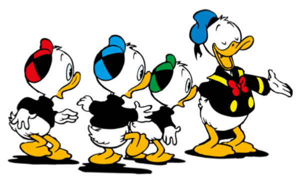
## Formalisierungsbeispiele II

p: Pinochio lügt.
q: Pinocchios Nase wächst.

| | | |
|---|---|---|
| **(1)** | **$p$** | Pinocchio lügt. |
| **(2)** | **$\neg p$** | Pinocchio lügt nicht. |
| **(3)** | **$p \wedge q$** | Pinocchio lügt und seine Nase wächst. |
| **(4)** | **$\neg p \vee q$** | Pinocchio lügt nicht oder seine Nase wächst. |
| **(5)** | **$p \rightarrow q$** | Wenn Pinocchio lügt, wächst seine Nase. |
| **(6)** | **$q \rightarrow p$** | Wenn Pinocchios Nase wächst, dann lügt er. |
| **(7)** | **$p \leftrightarrow q$** | Pinocchio lügt genau dann, wenn seine Nase wächst. |



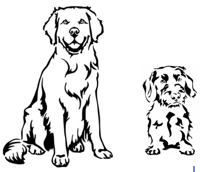
## Formalisierungsbeispiele III



p: Tick staunt.
q: Trick wundert sich.
r: Track kann es nicht glauben.
s: Donald ist stolz.

| | | |
|---|---|---|
| **(1)** | **$p \wedge q \vee s$** | Während Tick staunt und Trick sich wundert, ist Donald stolz. |
| **(2)** | **$p \wedge (q \vee s)$** | Während Tick staunt, wundert sich Trick oder ist Donald stolz. |
| **(3)** | **$\neg(p \wedge (q \vee s))$** | Es stimmt nicht, dass Tick staunt, während Trick sich wundert oder Donald stolz ist. |
| **(4)** | **$((p \wedge q) \rightarrow r)$** | Wenn Tick staunt und Trick sich wundert, dann kann Track es nicht glauben. |
| **(5)** | **$((p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s))$** | Wenn Tick staunt und Trick sich wundert, dann kann Track es nicht glauben und ist Donald stolz. |

## „wenn, dann“ & „nur dann, wenn“



p: Der Retriever bellt.
q: Der Dackel knurrt.

| | | |
|---|---|---|
| **(1)** | Wenn der Retriever bellt, knurrt der Dackel. | **p → q** |
| **(2)** | Der Dackel knurrt schon dann, wenn der Retriever nur bellt. | **p → q** |
| **(3)** | Der Dackel knurrt nur, wenn der Retriever bellt. | **q → p** |
| **(4)** | Nur wenn der Retriever bellt, knurrt der Dackel. | **q → p** |
| **(5)** | Dass der Retriever bellt genügt, damit der Dackel knurrt. | **p → q** |
| **(6)** | Damit der Dackel knurrt, muss der Retriever bellen. | **q → p** |



## „es sei denn, dass“


| | | | |
|---|---|---|---|
| **(1)** | Es wird regnen, es sei denn, dass es Frost gibt. | **p↔¬q** | p: Es wird regnen.<br>q: Es gibt Frost. |
| **(2)** | Es wird regnen, es sei denn, dass kein Wind aufkommt. | **p↔q** | p: Es wird regnen.<br>q: Es kommt Wind auf. |
| **(3)** | Petrus‘ Wünsche werden erfüllt, es sei denn, dass nicht genügend Wolken da sind. | **p↔q** | p: Petrus‘ Wünsche werden erfüllt.<br>q: Es sind genügend Wolken da. |
| **(4)** | Wenn genügend Wolken da sind, werden Petrus‘ Wünsche erfüllt. | **q→p** | p: Petrus‘ Wünsche werden erfüllt.<br>q: Es sind genügend Wolken da. |
| **(5)** | Petrus‘ Wünsche werden nur erfüllt, wenn genügend Wolken da sind. | **p→q** | p: Petrus‘ Wünsche werden erfüllt.<br>q: Es sind genügend Wolken da. |

## notwendig und hinreichend

p: Leo sagt, was er will.
q: Leo bekommt, was er will.

| | | |
|---|---|---|
| **(1)** | Wenn Leo sagt, was er will, bekommt er es. | **p → q** |
| **(2)** | Dass Leo sagt, was er will, genügt dafür, dass er es bekommt. | **p → q** |
| **(3)** | Nur wenn Leo sagt, was er will, bekommt er es auch. | **q → p** |
| **(4)** | Leo bekommt nur dann, was er will, wenn er sagt, was er will. | **q → p** |
| **(5)** | Dass Leo sagt, was er will, ist notwendig dafür, dass er es bekommt. | **q → p** |
| **(6)** | Leo bekommt genau dann, was er will, wenn er sagt, was er will. | **p ↔ q** |
| **(7)** | Dass Leo sagt, was er will, ist notwendig und hinreichend dafür, dass er bekommt, was er will. | **p ↔ q** |



## Notwendige und hinreichende Bedingungen

- A ist genau dann eine notwendige Bedingung für B, wenn B nicht ohne A sein kann (wenn B, dann A).
- A ist genau dann eine hinreichende Bedingung für B, wenn A nicht ohne B sein kann (wenn A, dann B).
- Wenn A eine notwendige Bedingung für B ist, dann ist B eine hinreichende Bedingung für A.
- Wenn A eine hinreichende Bedingung für B ist, dann ist B eine notwendige Bedingung für A.
- A kann eine notwendige Bedingung für B sein, ohne eine hinreichende Bedingung für B zu sein.
- A kann eine hinreichende Bedingung für B sein, ohne eine notwendige Bedingung für B zu sein.
- (Das Antezedens eines Konditionals ist eine hinreichende für dessen Konsequens, während das Konsequens eine notwendige Bedingung für das Antezedens ist.)

## *Schlüsse und Fehlschlüsse*
## *modus ponens*

- eigentlich: *modus ponendo ponens* (durch ein Setzen setzender Schluss)
- Beispiel: Wenn der Angeklagte um 22 Uhr zu Hause war, hat er das Fest früh verlassen. Der Angeklagte war um 22 Uhr zu Hause. Also hat er das Fest früh verlassen.
- Beispiel: Wenn Odette ein Schwan ist, dann hat sie Flügel. Odette ist ein Schwan. Also hat sie Flügel.
- Von der Affirmation des Vordersatzes (des Antezedens') kann auf den Nachsatz (das Konsequens) geschlossen werden.

Wenn A, dann B
A
———
Also B

$\mathbf{p \rightarrow q}$
$\mathbf{p}$
$\mathbf{\therefore q}$


$\vdash (p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$



## *fallacia consequentis*

- auch: „Affirmation des Nachsatzes“
- Beispiel: Wenn der Angeklagte um 22 Uhr zu Hause war, hat er das Fest früh verlassen. Der Angeklagte hat das Fest früh verlassen. Also war er um 22 Uhr zu Hause.
- Gegenbeispiel: Wenn Marlene ein Adler ist, dann hat sie Flügel. Marlene hat Flügel. Also ist Marlene ein Adler.
- Von der Affirmation des Nachsatzes (des Konsequens') kann <u>nicht</u> auf den Vordersatz (das Antezedens) geschlossen werden.

Wenn A, dann B
B
———
Also A

$\mathbf{p \rightarrow q}$
$\mathbf{q}$
$\mathbf{\therefore p}$


*Marlene*


$\nvdash (p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$

$(p \rightarrow q) \wedge q \nRightarrow p$

## *modus tollens*

- eigentlich: *modus tollendo tollens* (durch ein Aufheben aufhebender Schluss)
- Beispiel: Wenn Karlsson fliegen kann, dann ist er ein ungewöhnlicher Junge. Karlsson ist kein ungewöhnlicher Junge. Also kann Karlsson nicht fliegen.
- Beispiel: Wenn es schneit, ist es kalt. Es ist nicht kalt. Also schneit es nicht.
- Von der Negation des Nachsatzes (des Konsequens') kann auf die Negation des Vordersatzes (des Antezedens') geschlossen werden.

| | |
|---|---|
| Wenn A, dann B | $\mathbf{p \rightarrow q}$ |
| Nicht B | $\mathbf{\neg q}$ |
| Also nicht A | $\mathbf{\therefore \neg p}$ |

$\vdash (p \rightarrow q) \land \neg q \rightarrow \neg p$

$(p \rightarrow q) \land \neg q \Rightarrow \neg p$




## *fallacia antecedentis*

- auch: „Negation des Vordersatzes"
- Wenn Tistow fliegen kann, dann ist er ein ungewöhnlicher Junge. Tistow kann nicht fliegen. Also ist er kein ungewöhnlicher Junge.
- Gegenbeispiel: Wenn es schneit, ist es kalt. Es schneit nicht. Also ist es nicht kalt.
- Von der Negation des Vordersatzes (Antezedens) kann <u>nicht</u> auf die Negation des Nachsatzes (Konsequens) geschlossen werden.

| | |
|---|---|
| Wenn A, dann B | $\mathbf{p \rightarrow q}$ |
| Nicht A | $\mathbf{\neg p}$ |
| Also nicht B | $\mathbf{\therefore \neg q}$ |

$\nvdash (p \rightarrow q) \land \neg p \rightarrow \neg q$

$(p \rightarrow q) \land \neg p \nRightarrow \neg q$

## *modus ponendo tollens*

- „durch ein Setzen aufhebender (zurückweisender) Schluss"
- Beispiel: Es stimmt nicht, dass Wronski beide, Anna und Kitty, liebt. Wronski liebt Anna. Also liebt Wronski Kitty nicht.
- Beispiel: Es stimmt nicht, dass Wronski beide, Anna und Kitty, liebt. Wronski liebt Kitty. Also liebt Wronski Anna nicht.
- Von der Affirmation eines Konjunktionsglieds einer negierten Konjunktion kann auf die Negation des anderen Konjunktionsglieds geschlossen werden.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Nicht (A und B) | $\neg(p \wedge q)$ | Nicht (A und B) | $\neg(p \wedge q)$ |
| A | $p$ | B | $q$ |
| Also nicht B | $\therefore \neg q$ | Also nicht A | $\therefore \neg p$ |

$\vdash \neg(p \wedge q) \wedge p \rightarrow \neg q$

$\neg(p \wedge q) \wedge p \Rightarrow \neg q$

$\vdash \neg(p \wedge q) \wedge q \rightarrow \neg p$

$\neg(p \wedge q) \wedge q \Rightarrow \neg p$




## Negation eines Konjunktionsglieds

- Beispiel: Es stimmt nicht, dass Leo beide trifft, Marlene und Pam. Leo trifft Marlene nicht. Also trifft Leo Pam.
- Beispiel: Es stimmt nicht, dass Leo beide trifft, Marlene und Pam. Leo trifft Pam nicht. Also trifft Leo Marlene.
- Von der Negation eines Konjunktionsglieds einer negierten Konjunktion kann <u>nicht</u> auf das andere Glied der Konjunktion geschlossen werden.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Nicht (A und B) | $\neg(p \wedge q)$ | Nicht (A und B) | $\neg(p \wedge q)$ |
| Nicht A | $\neg p$ | Nicht B | $\neg q$ |
| Also B | $\therefore q$ | Also A | $\therefore p$ |

$\nvdash \neg(p \wedge q) \wedge \neg p \rightarrow q$

$\neg(p \wedge q) \wedge \neg p \nRightarrow q$

$\nvdash \neg(p \wedge q) \wedge \neg q \rightarrow p$

$\neg(p \wedge q) \wedge \neg q \nRightarrow p$

## *modus tollendo ponens*

- „durch ein Aufheben setzender Schluss“
- Beispiel: Das Känguru ist beleidigt oder krank. Das Känguru ist nicht beleidigt. Also ist das Känguru krank.
- Beispiel: Das Känguru ist beleidigt oder krank. Das Känguru ist nicht krank. Also ist das Känguru beleidigt.
- Von der Negation eines Adjunktionsglieds kann auf das jeweils andere Adjunktionsglied geschlossen werden.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A oder B | **$p \vee q$** | A oder B | **$p \vee q$** |
| Nicht A | **$\neg p$** | Nicht B | **$\neg q$** |
| Also B | **$\therefore q$** | Also A | **$\therefore p$** |

$\vdash (p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow q$ $\qquad$ $\vdash (p \vee q) \wedge \neg q \rightarrow p$

$(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$ $\qquad$ $(p \vee q) \wedge \neg q \Rightarrow p$




## Affirmation eines Adjunktionsglieds

- Beispiel: Das Känguru ist beleidigt oder krank. Das Känguru ist beleidigt. Also ist das Känguru nicht krank.
- Beispiel: Das Känguru ist beleidigt oder krank. Das Känguru ist krank. Also ist das Känguru nicht beleidigt.
- Von der Affirmation eines Adjunktionsglieds kann <u>nicht</u> auf die Negation des anderen Adjunktionsglieds geschlossen werden.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A oder B | **$p \vee q$** | A oder B | **$p \vee q$** |
| A | **$p$** | B | **$q$** |
| Also nicht B | **$\therefore \neg q$** | Also nicht A | **$\therefore \neg p$** |

$\nvdash (p \vee q) \wedge p \rightarrow \neg q$ $\qquad$ $\nvdash (p \vee q) \wedge q \rightarrow \neg p$

$(p \vee q) \wedge p \not\Rightarrow \neg q$ $\qquad$ $(p \vee q) \wedge q \not\Rightarrow \neg p$

## zulässiger Umkehrschluss

– Beispiel: Der Prädikatsbegriff ist im Subjektbegriff eines Urteils dann und nur dann enthalten, wenn es sich um ein analytisches Urteil handelt. Also handelt es sich dann und nur dann um ein analytisches Urteil, wenn der Prädikatsbegriff im Subjektbegriff enthalten ist.
– Von einem Bikonditional kann auf seine Umkehrung geschlossen werden.

| A genau dann, wenn B | $\mathbf{p \leftrightarrow q}$ |
|---|---|
| Also B genau dann, wenn A | $\therefore\ \mathbf{q \leftrightarrow p}$ |

$\vdash (p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \leftrightarrow p)$

$(p \leftrightarrow q) \Rightarrow (q \leftrightarrow p)$




## unzulässiger Umkehrschluss

– Beispiel: Wenn Karlchen ein Eis bekommen hat, ist er zufrieden. Also hat Karlchen ein Eis bekommen, wenn er zufrieden ist.
– Gegenbeispiel: Wenn die Strecke kürzer als 10 km ist, dann ist sie kürzer als 75 km. Also ist die Strecke kürzer als 10 km, wenn sie kürzer als 75 km ist.
– Von einem Konditional kann <u>nicht</u> auf seine Umkehrung geschlossen werden.

| Wenn A, dann B | $\mathbf{p \rightarrow q}$ |
|---|---|
| ~~Also A, wenn B~~ | $\therefore\ \cancel{\mathbf{q \rightarrow p}}$ |
| ~~(Also: wenn B, dann A)~~ | |

$\nvdash (p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

$(p \rightarrow q) \nRightarrow (q \rightarrow p)$

## Kontraposition

– Beispiel: Wenn es schneit, ist es kalt. Also schneit es nicht, wenn es nicht kalt ist.

– Beispiel: Wenn die Schnapspralinen alle sind, ist das Känguru schlecht gelaunt. Also sind die Schnapspralinen nicht alle, wenn das Känguru nicht schlecht gelaunt ist.

– Von einem Konditional kann auf seine Umkehrung geschlossen werden, wenn Antezedens und Konsequens nicht nur gegeneinander getauscht, sondern gleichzeitig auch beide negiert werden.

Wenn A, dann B
Also nicht A, wenn nicht B
(Also: wenn nicht B, dann nicht A)

$$\frac{\mathbf{p \rightarrow q}}{\mathbf{\therefore \neg q \rightarrow \neg p}}$$

$\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

$(p \rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$


15.04.2019 Prof. Dr. Katia Saporiti, Einführung in die formale Logik I, Vorlesung 7 Seite 21

## Falsche Kontraposition

– Wenn es schneit, ist es kalt. Also ist es nicht kalt, wenn es nicht schneit.

– Gegenbeispiel: Wenn die Strecke kürzer als 10 km ist, dann ist sie kürzer als 75 km. Also ist die Strecke nicht kürzer als 75 km, wenn sie nicht kürzer als 10 km ist.

– Von einem Konditional kann nicht auf das Konditional geschlossen werden, das man erhält, indem man Antezedens und Konsequens negiert.

Wenn A, dann B
~~Also nicht B, wenn nicht A~~
~~(Also: wenn nicht A, dann nicht B)~~

$$\frac{p \rightarrow q}{\cancel{\therefore \neg p \rightarrow \neg q}}$$

$\nvdash (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$

$(p \rightarrow q) \not\Rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$


15.04.2019 Prof. Dr. Katia Saporiti, Einführung in die formale Logik I, Vorlesung 7 Seite 22

## *Überprüfen von Schlüssen mit Wahrheitstafeln*

### *modus (ponendo) ponens*

| p | q | (p → q) | ∧ p | → q |
|---|---|---|---|---|
| w | w | w | w | w |
| w | f | f | f | w |
| f | w | w | f | w |
| f | f | w | f | w |
| | | 1 | 2 | 3 |

### *fallacia consequentis*

| p | q | (p → q) | ∧ q | → p |
|---|---|---|---|---|
| w | w | w | w | w |
| w | f | f | f | w |
| f | w | w | w | f |
| f | f | w | f | w |
| | | 1 | 2 | 3 |

- Wenn ein Schluss gültig ist, ist das Konditional, dessen Antezedens die Konjunktion seiner Prämissen und dessen Konsequens seine Konklusion ist, logisch wahr (eine Tautologie).
- Eine aussagenlogische Tautologie ist unter jeden Booleschen Bewertung wahr.
- Eine aussagenlogische Tautologie ist also auch unter jeder atomaren Bewertung und damit für jede Wahrheitswertverteilung auf die in ihr vorkommenden atomaren Formeln wahr.



((p ↔ ¬q) ∧ (r ∨ q) ) ∧ (r → ¬p) ⇒ ¬p

⊢ ((p ↔ ¬q) ∧ (r ∨ q) ) ∧ (r → ¬p) → ¬p

*Konditional*

*Hauptzeichen*

*Konjunktion*

*Konjunktion*

| p | q | r | ((p ↔ | ¬q) | ∧ | (r ∨ q)) | ∧ | (r → | ¬p) | → | ¬p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| w | w | w | f | f | f | w | f | f | f | w | f |
| w | w | f | f | f | f | w | f | w | f | w | f |
| w | f | w | w | w | w | w | f | f | f | w | f |
| w | f | f | w | w | f | f | f | w | f | w | f |
| f | w | w | w | f | w | w | w | w | w | w | w |
| f | w | f | w | f | w | w | w | w | w | w | w |
| f | f | w | f | w | f | w | f | w | w | w | w |
| f | f | f | f | w | f | f | f | w | w | w | w |